

Методы дискретной оптимизации

Часть 1. Комбинаторная оптимизация Необходимые элементы теории графов

Определение

V – произвольное счетное множество, E – произвольное подмножество его двухэлементных подмножеств.

Пара $G = (V, E)$ называется графом (неориентированным графом).

Матрица смежности (n, m) -мультиграфа (мультиорграфа) G

$$A = (a_{ij}), \quad i, j \in N_n, \quad a_{ij} = \begin{cases} 0, & (i, j) \notin E \quad \forall j = 1, 2, \dots, n, \\ l, & \exists K \subseteq N_n, |K| = l : (i, j_k) = (i, j) \in E \quad \forall k \in K. \end{cases}$$

Матрица инцидентности (n, m) -мультиграфа G

$$B = (b_{ij}), \quad i \in N_n, j \in N_m, b_{ij} = \begin{cases} 0, & i \notin e_j, \\ 1, & i \in e_j \end{cases}$$

Матрица инцидентности (n, m) -мультиорграфа G

$$D = (d_{ij}), \quad i \in N_n, j \in N_m, d_{ij} = \begin{cases} 0, & i \notin e_j, \\ 1, & e_j = (i, k), k \in N_n, \\ -1, & e_j = (k, i), k \in N_n \end{cases}$$

Степень исхода вершины i – число выходящих из вершины дуг: $\delta^+(i)$.

Степень захода вершины i – число входящих в вершину дуг: $\delta^-(i)$.

Степень вершины i : $\delta^+(i) + \delta^-(i) = \delta(i)$. Матрица степеней δ мультиорграфа G – диагональная матрица, на главной диагонали которой находятся степени соответствующих вершин.

Теорема 1.

Если G – (n, m) -мультиграф, $n > 1$, $m > 0$ с матрицей смежности A , матрицей инцидентности B и матрицей степеней δ , то

$$B \cdot B^T = A + \delta.$$

Доказательство.

$$i \neq j \Rightarrow (B \cdot B^T) = \sum_{k=1}^m b_{ik} b_{jk}, \quad b_{ik}, b_{jk} \in \{0, 1\}$$

$$b_{ik} b_{jk} = 1 \Leftrightarrow 1 = b_{ik} = b_{jk} \Leftrightarrow i, j \in e_k \Leftrightarrow e_k = (i, j)$$

Следовательно, суммирование производится по тем ребрам k , которые составляют пару (i, j) . При суммировании получается значение l как число параллельных ребер, связывающих i и j , т.е. значение a_{ij} .

$$i = j \Rightarrow b_{ik} b_{jk} = b_{ik}^2 = 1 \Leftrightarrow b_{ik} = 1 \Leftrightarrow i \in e_k$$

Суммируя по всем индексам k таким, что вершина i инцидентна ребру k , получаем степень вершины i : $(BB^T)_{ii} = \delta(i)$. Теорема доказана.

Пример:

$$B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow B^T = (11), \quad BB^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Замечание. Задавая каждому из ребер множества E ориентацию, получим из мультиграфа мультиорграф, при этом матрица смежности будет определяться поэлементно как

$$\bar{a}_{ij} = \begin{cases} 0, & (i, j) \notin E, \\ 1, & (i, j) \in E \end{cases}$$

Отсюда следует, что при любом выборе ориентации ребер матрицы A и $\bar{A}$ связаны равенством $A = \bar{A} + \bar{A}^T$. Для ориентированного случая справедлива

Теорема 2.

Пусть $G - (n, m)$ -мультиорграф, $n > 1$, $m > 0$ с матрицей смежности $\bar{A}$, матрицей инцидентности D , матрицей степеней δ . Тогда

$$D \cdot D^T = \delta - \bar{A} - \bar{A}^T$$

Доказательство Теоремы 2. $(D \cdot D^T)_{ij} = \sum_{k=1}^m d_{ik} d_{jk}$. Как и в доказательстве теоремы 1, рассмотрим случаи:

$$1) \quad i \neq j \Rightarrow d_{ik} \cdot d_{jk} = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} e_k = (i, p), p \in V, \\ e_k = (j, q), q \in V \end{array} \Rightarrow i = j \\ \left\{ \begin{array}{l} e_k = (p, i), p \in V, \\ e_k = (q, j), q \in V \end{array} \Rightarrow i = j \end{array} \right. \right.$$

$$2) \quad d_{ik} \cdot d_{jk} = -1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} e_k = (i, p), p \in V, \\ e_k = (q, j), q \in V \end{array} \Rightarrow e_k = (i, j) \\ \left\{ \begin{array}{l} e_k = (p, i), p \in V, \\ e_k = (j, q), q \in V \end{array} \Rightarrow e_k = (j, i) \end{array} \right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^m d_{ik} \cdot d_{jk} = \sum_{k: e_k = (i, j) \vee e_k = (j, i)} (-1)$$

$$i = j \Rightarrow d_{ik} \cdot d_{jk} = (d_{ik})^2 = 1 \Leftrightarrow d_{ik} = \pm 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \exists p \in N_n : e_k = (i, p) \\ \exists q \in N_n : e_k = (q, i) \end{array} \Rightarrow \right.$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^m d_{ik} \cdot d_{jk} = \sum_{k: e_k = (i, p) \vee e_k = (q, i)} (+1) = \delta(i)$$

Суммирование по всем k в случае несовпадения i и j дает (с отрицательным знаком) число дуг, связывающих эти вершины, т.е.

$$-(\bar{A} + \bar{A}^T)_{ij}.$$

Суммирование по всем k в случае совпадения i и j дает число дуг, инцидентных вершине i , т.е. $\delta(i)$. Это окончательно доказывает теорему.

Замечание. Правая часть равенства в утверждении теоремы 2 не зависит от выбора ориентации ребер графа, если мультиорграф получен из мультиграфа назначением направления ребер. При этом $\bar{A} + \bar{A}^T = A$, где A – матрица инцидентности исходного мультиграфа.

Теоремы 1 и 2 касались представления матриц $B \cdot B^T$ и $D \cdot D^T$ для мультиграфа и мультиорграфа соответственно. Рассмотрим представление произведения $B \cdot B^T$. Для этой цели введем следующее понятие.

Определение

Пусть G – (n, m) -мультиграф. Реберным мультиграфом мультиграфа G называется мультиграф $L(G)$, у которого в качестве множества вершин выступают ребра исходного мультиграфа G , т.е. элементы множества E , а множество ребер строится следующим образом:

- Вершины e_i, e_j мультиграфа $L(G)$ соединены ребром тогда и только тогда, когда ребра e_i, e_j мультиграфа G смежны, т.е. имеют общую вершину.
- Если ребра e_i, e_j мультиграфа G не параллельны, то вершины e_i, e_j мультиграфа $L(G)$ соединены единственным ребром.
- Если ребра e_i, e_j мультиграфа G параллельны, то вершины e_i, e_j мультиграфа $L(G)$ соединены парой параллельных ребер.

Теорема 3.

Для матрицы инцидентности B мультиграфа G справедливо равенство

$$B^T \cdot B = A_{L(G)} + 2 \cdot I_m,$$

где $A_{L(G)}$, I_m – соответственно матрица смежности мультиграфа $L(G)$ и единичная матрица порядка m .

Доказательство. $(B^T \cdot B)_{ij} = (b^i, b^j) = \sum_{l=1}^n b_{li} \cdot b_{lj}$, где b^i – i -ый столбец матрицы B , $b_{li} \in \{0, 1\}$, при этом в каждом столбце матрицы B ровно 2 единицы, остальные элементы нули. Рассмотрим случаи:

- $i = j \Rightarrow \sum_{l=1}^n b_{li}^2 = 2$, следовательно, на главной диагонали матрицы стоят двойки: $(B^T \cdot B)_{ii} = 2, i = 1, 2, \dots, n$.
- $i \neq j$, при этом ребра e_i, e_j в мультиграфе G смежны, но не параллельны, т.е. в $L(G)$ вершины e_i, e_j соединены единственным ребром. Тогда

$$\exists! k, \exists(p, q), p \neq q : \begin{cases} e_i = (k, p) \Rightarrow b_{ki} = 1, \\ e_j = (k, q) \Rightarrow b_{kj} = 1 \end{cases} \Rightarrow \exists! k : b_{ki} \cdot b_{kj} = 1.$$

Следовательно, в этом случае $(B^T \cdot B)_{ij} = 1$.

- $i \neq j$, при этом ребра e_i, e_j в мультиграфе G параллельны, т.е. в $L(G)$ вершины e_i, e_j соединены парой параллельных ребер. Тогда

$$\begin{aligned} \exists!(k_1, k_2) : \begin{cases} e_i = (k_1, k_2) \Rightarrow b_{k_1 i} = 1 = b_{k_2 i}, \\ e_j = (k_1, k_2) \Rightarrow b_{k_1 j} = 1 = b_{k_2 j} \end{cases} &\Rightarrow \\ &\Rightarrow \exists!(k_1, k_2) : b_{k_1 i} \cdot b_{k_1 j} = 1 \end{aligned}$$

Следовательно, в этом случае $(B^T \cdot B)_{ij} = 2$.

- $i \neq j$, при этом ребра e_i, e_j в мультиграфе G не смежны, т.е. в $L(G)$ вершины e_i, e_j не соединены ребром. Тогда $\forall k = 1, 2, \dots, n : \begin{cases} b_{ki} = 0, \\ b_{kj} = 0 \end{cases}$

Следовательно, в этом случае $(B^T \cdot B)_{ij} = 0$. Совокупность выводов в рассмотренных случаях доказывает теорему.

Определение

Матрица называется вполне унимодулярной, если определитель любой ее квадратной подматрицы равен 0 или ± 1 .

Теорема 4.

Если $D = D(\bar{G})$ матрица инцидентности мультиорграфа $\bar{G}$, то D – вполне унимодулярна.

Доказательство. Рассмотрим произвольную квадратную подматрицу размера k . Если $k = 1$, то утверждение справедливо по определению матрицы инцидентности. Если предположить справедливость для квадратных подматриц размера не более k , то при переходе к размерности $k + 1$ возможны случаи:

- В квадратной подматрице размера $k + 1$ существует нулевой столбец. В таком случае утверждение тривиально.
- В квадратной подматрице размера $k + 1$ каждый столбец содержит как -1 , так и $+1$. Прибавляя к первой строке остальные строки, получим равенство нулю определителя этой подматрицы.
- В квадратной подматрице размера $k + 1$ существует столбец, содержащий только один ненулевой элемент, т.е. 1 или -1 . Разлагая определитель по данному столбцу, делаем индуктивный переход и завершаем доказательство теоремы.

Определение

Деревом называется связный ациклический граф, содержащий не менее двух вершин. Число вершин в дереве на 1 превосходит числа ребер в нем.

Теорема 5.

Если $D = D(\bar{G})$ – n -вершинное ориентированное дерево ($n > 1$), то всякая квадратная подматрица порядка $n - 1$ матрицы D невырождена.

Доказательство. Поскольку рассматривается дерево, то число строк в матрице равно n , число столбцов – $n - 1$. Поэтому квадратная подматрица порядка $n - 1$ может возникнуть лишь при вычеркивании одной из строк матрицы D . Применяя индукцию по n , рассмотрим случай $n = 2$, тогда

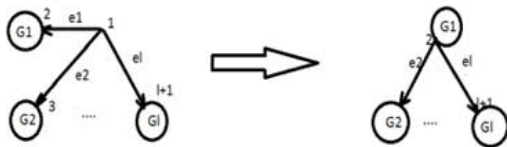
$$D = \begin{matrix} & T \\ \begin{matrix} (1:\dot{-}1) \\ (-1:\dot{1}) \end{matrix} & T \end{matrix}, \text{ в обоих случаях утверждение очевидно.}$$

Предположим, что утверждение справедливо для $n = 1, 2, \dots, k$ и рассмотрим $n = k + 1$. Вычеркнем произвольную строку с номером i . Этой строке соответствует вершина i степени l . Перенумеруем строки и столбцы так, чтобы строка с номером i оказалась на месте первой и при этом первые l ее элементов оказались отличными от 0. Эта операция соответствует переименованию вершин и ребер в графе. Далее, умножим при необходимости столбцы из числа первых l , чтобы первые l элементов первого столбца оказались равными $+1$. Эта операция, возможно, изменит знак определителя подматрицы.

Таким образом можно считать, что матрица D имеет вид

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & 0 & & 0 & & & \\ 0 & -1 & 0 & & 0 & & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & & & \end{pmatrix}$$

У правого дерева матрица инцидентности, как у исходного, только нумерация строк и столбцов начинается с 2. По индуктивному предположению последняя матрица после вычеркивания первой строки дает невырожденную матрицу. Последняя совпадает с матрицей, которая получается при вычеркивании первого столбца и первых двух строк матрицы D , что доказывает теорему.



Теорема 6.

Если $\bar{G} - (n, m)$ -мультиорграф без изолированных вершин, имеющий k компонент связности, то ранг его матрицы инцидентности равен $n - k$.

Доказательство. Путем переименования вершин и ребер в графе, что соответствует перестановкам строк и столбцов, матрицу инцидентности D можно привести к блочно-диагональному виду, на главной диагонали матрицы D будут находиться матрицы D_i , номер i соответствует i -ой компоненте связности, $i = 1, 2, \dots, k$. Каждая из компонент – дерево, по условию содержащее хотя бы одну дугу, в силу связности каждой из компонент, для каждого i существует остовное дерево, содержащее все вершины компоненты. По теореме 5 ранг матрицы инцидентности не менее $n_i - 1$, т.е. на 1 менее числа вершин в i -ой компоненте. С другой стороны, в каждом столбце матрицы D_i ровно два ненулевых элемента: 1 и -1, поэтому сумма строк D_i равна 0, следовательно, ранг D_i не более $n_i - 1$. Следовательно, на главной диагонали блочно-диагональной матрицы D находятся матрицы D_i , ранг каждой из матриц D_i равен $n_i - 1$. Ранг всей матрицы D в таком случае равен $n - k$. Теорема доказана.

Пусть как и ранее, $\bar{G}$ – связный (n, m) -мультиорграф с матрицей инцидентности D . Обозначим через $D(j_1, j_2, \dots, j_{n-1})$ подматрицу с номерами столбцов $j_1, j_2, \dots, j_{n-1}$ матрицы D :

$$D(j_1, j_2, \dots, j_{n-1}) = (d^{j_1} : d^{j_2} : \dots : d^{j_{n-1}}).$$

Теорема 7.

Ранг подматрицы $D(j_1, j_2, \dots, j_{n-1})$ равен $n - 1$ тогда и только тогда, когда ребра e_{j_l} , $l = 1, 2, \dots, n - 1$ порождают дерево.

Доказательство. Необходимость следует из теоремы 6. Достаточность следует из того факта, что если мультиорграф, в данном случае порожденный указанными ребрами, связан, но деревом не является, то он содержит циклы. Процесс удаления дуг из циклов без нарушения связности приводит порожденный граф к дереву с не более $n - 2$ дугами, что противоречит связности. Следовательно, в данном мультиорграфе по крайней мере 2 компоненты связности и по теореме 6 ранг матрицы не превосходит $n - 2$. Теорема доказана.

Определение

Число остовов, т.е. остовных деревьев в графе называется его сложностью (древесной сложностью графа) и обозначается как $k(G)$.

Задание ориентации ребер в графе G не меняет его древесной сложности.

Теорема 8.

Пусть G – (n, m) -мультиграф, $n > 1$, $m > 0$, $\bar{G}$ – мультиорграф, полученный из G заданием ориентации ребер, D – матрица инцидентности $\bar{G}$, $D(i; j_1, j_2, \dots, j_{n-1})$ – ее квадратная $(n-1) \cdot (n-1)$ подматрица со столбцами $j_1, j_2, \dots, j_{n-1}$ и строками матрицы D , кроме i -ой. Тогда

$$k(G) = \sum_{1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_{n-1} \leq m} |\det D(i; j_1, j_2, \dots, j_{n-1})|$$

Доказательство Теоремы 8. По теореме 7 матрица $D(i; j_1, j_2, \dots, j_{n-1})$ невырождена в том и только в том случае, когда дуги $e_{j_1}, e_{j_2}, \dots, e_{j_{n-1}}$ порождают дерево. Следовательно, $|\det D(i; j_1, j_2, \dots, j_{n-1})| = 1$ тогда и только тогда, когда дуги $e_{j_1}, e_{j_2}, \dots, e_{j_{n-1}}$ порождают дерево. Каждому дереву, таким образом, однозначно соответствует такой набор индексов $j_1, j_2, \dots, j_{n-1}$, для которого $|\det D(i; j_1, j_2, \dots, j_{n-1})| = 1$. Отсюда и из условия $\det D(i; j_1, j_2, \dots, j_{n-1}) \in \{0, \pm 1\}$ сумма по всем возможным наборам дает $k(G)$. Теорема доказана.

Матричная теорема о древесной сложности (т. Кирхгофа, сформулирована в 1847 г., доказана в 1940 г.)

Теорема 9 (Кирхгофа)

Пусть G – связный (n, m) – мультиграф с матрицей смежности A и матрицей степеней δ . Тогда число остовов в G равно алгебраическому дополнению любого из элементов матрицы $\delta - A$.

Доказательство. Зададим направление ребер G , сделав их дугами, получим связный мультиорграф с $m > n - 2$ дугами (в силу связности G). В его матрице инцидентности D удалим последнюю строку с номером n , полученную матрицу обозначим D_n .

$$\begin{aligned} \det(D_n \cdot D_n^T) &= \sum_{1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_{n-1} \leq m} \det D_n \begin{pmatrix} 1, 2, \dots, n-1 \\ j_1, j_2, \dots, j_{n-1} \end{pmatrix} \\ &\cdot \det D_n^T \begin{pmatrix} j_1, j_2, \dots, j_{n-1} \\ 1, 2, \dots, n-1 \end{pmatrix} = \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_{n-1} \leq m} \left[\det D_n \begin{pmatrix} 1, 2, \dots, n-1 \\ j_1, j_2, \dots, j_{n-1} \end{pmatrix} \right]^2 = \\ &= \sum_{1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_{n-1} \leq m} |\det D(\bar{n}, j_1, j_2, \dots, j_{n-1})| \end{aligned}$$

Последнее выражение равно $k(G)$ по теореме о представлении древесной сложности. Для матрицы

$$D = \begin{pmatrix} d_1 \\ \dots \\ d_n \end{pmatrix} \Rightarrow D_n \cdot D_n^T = \{(d_i, d_j)\}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n-1$$

Отсюда $\det(D_n \cdot D_n^T) = k(G) = (D \cdot D^T)_{n,n} = (\delta - A)_{n,n}$. Здесь через $C_{i,j}$ обозначено алгебраическое дополнение элемента (i, j) матрицы C . Замена нумерации строк приводит к тому, что величина $k(G)$ равна $(\delta - A)_{i,i}$, т.е. алгебраическому дополнению элемента (i, i) матрицы $\delta - A$. Для завершения доказательства осталось показать, что при любых $i, j : i \leq i \neq j \leq n$ имеет место равенство $(\delta - A)_{i,j} = \det(D_i D_i^T)$. Докажем соотношение

$$\det(D_i \cdot D_j) = (-1)^{j-i} \det(D_i \cdot D_i), \quad i < j.$$

Для этого в D_j прибавим все строки (т.е. все кроме j -ой, вычеркнутой из исходной матрицы) к строке с номером i . Тогда вместо строки d_i получим строку $-d_j$, поскольку сумма строк матрицы D равна 0. В результате величина $\det D_j^T \begin{pmatrix} j_1, j_2, \dots, j_{n-1} \\ 1, 2, \dots, n-1 \end{pmatrix}$ не изменится. Сделаем $j - i - 1$ последовательных замен в матрице D_j :

$$\begin{pmatrix} \dots \\ d_i = -d_j \\ d_{i+1} \\ \dots \\ d_{j-1} \\ d_{j+1} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \dots \\ d_{i+1} \\ d_i = -d_j \\ \dots \\ d_{j-1} \\ d_{j+1} \end{pmatrix} \rightarrow \dots \rightarrow \begin{pmatrix} \dots \\ d_{i+1} \\ d_{i+2} \\ \dots \\ d_i = -d_j \\ d_{j+1} \end{pmatrix}$$

В результате получим матрицу, совпадающую с D_i всюду кроме строки j , которая равна $-d_j$.

В результате таких преобразований каждый множитель вида

$$\det D_j^T \begin{pmatrix} j_1, j_2, \dots, j_{n-1} \\ 1, 2, \dots, n-1 \end{pmatrix}$$

будет умножен на коэффициент $(-1)^{j-i}$. Отсюда следует, что

$$\det(D_i \cdot D_j^T) = (-1)^{j-i} \det(D_i \cdot D_i^T) = (-1)^{j+i} \cdot (\delta - A)_{i,i} = (-1)^{j+i} \cdot k(G)$$

С другой стороны,

$$(\delta - A)_{i,j} = (-1)^{i+j} \det(D_i \cdot D_j^T) \Rightarrow (\delta - A)_{i,j} = k(G)$$

Полученное равенство доказывает теорему.

Теорема 10 (Кэли).

Пусть $G = K_n$ – полный n -граф. Число остовов в нем равно n^{n-2} .

Доказательство.

$$\delta - A = \begin{pmatrix} n-1 & -1 & -1 & \dots & -1 & -1 \\ -1 & n-1 & -1 & \dots & -1 & -1 \\ -1 & -1 & n-1 & \dots & -1 & -1 \\ & & & \dots & & \\ -1 & -1 & -1 & \dots & n-1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & \dots & -1 & n-1 \end{pmatrix}$$

По теореме 9 величина $k(G)$ равна алгебраическому дополнению любого элемента этой матрицы. Возьмем в качестве такого элемента (n, n) . Тогда

$$\begin{aligned}
 (\delta - A)_{(nn)} &= \begin{vmatrix} n-1 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & n-1 & \dots & -1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -1 & \dots & n-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & \dots & -1 \\ 1 & n-1 & \dots & -1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & -1 & \dots & n-1 \end{vmatrix} = \\
 &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & n & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & \dots & n \end{vmatrix} = n^{n-2}
 \end{aligned}$$

На первом шаге все столбцы прибавили к 1-му. На втором шаге первый столбец прибавлен к каждому из других. Теорема доказана.